

Компонент ОПОП 09.03.02 Информационные системы и технологии,
наименование ОПОП

Б1.О.16
шифр дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Дисциплины
(модуля)

Математический анализ

Разработчик (и):

Ромахова О.А.

ФИО

ст. преподаватель

должность

нет

ученая степень,
звание

Утверждено на заседании кафедры

Высшей математики и физики

наименование кафедры

протокол №5 от 27.02.2025

И.о. заведующего кафедрой ВМиФ

подпись

Левитес В.В.

ФИО

1. Критерии и средства оценивания компетенций и индикаторов их достижения, формируемых дисциплиной (модулем)

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора(ов) достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)			Оценочные средства текущего контроля	Оценочные средства промежуточной аттестации
		<i>Знать</i>	<i>Уметь</i>	<i>Владеть</i>		
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ИД-2ОПК-1 «Решает... задачи с применением... методов математического анализа и моделирования»	теоретические основы математического анализа в части определения, основных свойств, дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной (ФОП): - определение ФОП, способы задания, основные глобальные свойства, классификации функций; - определения и свойства основных теоретических понятий, относящихся к ФОП (теория пределов, непрерывность, дифференциальное исчисление и интегральное исчисление);	применять методы исследования свойств функций, дифференциального и интегрального исчисления ФОП для решения учебных и практических задач: - исследование основных характеристик функциональной зависимости между двумя переменными, заданной аналитически или графически; - переводение на математический язык простейших задач, поставленных в терминах других предметных	основными приемами математического моделирования с использованием функций и практическими навыками исследования характеристик и особенностей функциональных зависимостей методами математического анализа, в том числе: - приемами вычисления пределов; - техникой дифференцирования и приемами интегрирования ФОП; - навыками	- типовые задания по вариантам для выполнения контрольных и расчетно-графических работ	Результаты текущего контроля Экзаменационные билеты

		- основные способы обоснования математических утверждений; - основные логические связи между математическими фактами (следствия, равносильность, необходимые или (и) достаточные условия); - правила выполнения основных операций: вычисление пределов, дифференцирование и интегрирование функций одной переменной.	областей; - выбор теоретических фактов и методов, с помощью которых можно решить актуальную прикладную задачу; - исследование и (или) интерпретация результата решения задачи, проверка его достоверности или правдоподобности.	использования вычислительных средств, графопостроителей, компьютерных программ поддержки учебного процесса и прикладных математических пакетов; - навыками расширения и углубления математических знаний и умений, в том числе в режиме самообразования		
--	--	--	---	--	--	--

2. Оценка уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)

Показатели оценивания компетенций (индикаторов их достижения)	Шкала и критерии оценки уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)			
	Ниже порогового («неудовлетворительно»)	Пороговый («удовлетворительно»)	Продвинутый («хорошо»)	Высокий («отлично»)
Полнота знаний	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущены не грубые ошибки.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки. Допущены некоторые погрешности.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки.
Наличие умений	При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Выполнены типовые задания с не грубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме (отсутствуют пояснения, неполные выводы)	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные задания с некоторыми погрешностями. Выполнены все задания в полном объёме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Задания выполнены в полном объеме без недочетов.
Наличие навыков (владение опытом)	При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для выполнения стандартных заданий с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при выполнении стандартных заданий с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.
Характеристика сформированности компетенции	Компетенции фактически не сформированы. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Зачетное количество баллов не набрано согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков достаточно для решения стандартных профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для решения сложных, в том числе нестандартных, профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону

3. Критерии и шкала оценивания заданий текущего контроля

3.1 Критерии и контрольных оценивания заданий контрольных и расчетно-графических работ.

Перечень контрольных заданий, рекомендации по выполнению представлены в методических материалах по освоению дисциплины (модуля) и в электронном курсе в ЭИОС МАУ.

В ФОС включен типовой вариант контрольных работ.

Контрольная работа «Предел последовательности. Предел и непрерывность функций одной переменной» (28 баллов)

Задача 1 (3 балла)

Используя строгое определение предела последовательности, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$.

Задача 2 (6 баллов)

Запишите каждую последовательность в развернутом виде и укажите, существует ли и чему равен $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Для каждой последовательности $\{x_n\}$ укажите, является ли она а) сходящейся,

б) расходящейся, в) бесконечно малой, г) бесконечно большой, д) ограниченной, е) монотонной последовательностью:

$$\begin{aligned} 1) \ x_n &= 3n-1; & 2) \ x_n &= \frac{(-1)^n}{n^2+41}; & 3) \ x_n &= ((-1)^n+1) \cdot \sqrt{n}; \\ 4) \ x_n &= \frac{2^n-1}{2^n}; & 5) \ x_n &= \frac{1}{\ln(n+1)}; & 6) \ x_n &= \sin \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}$$

Задача 3 (8 баллов)

Вычислите пределы последовательностей, используя свойства сходящихся, ограниченных, бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей; поясните каждый ответ с точки зрения описательного определения предела последовательностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-4n+1}{8n^2-5n+3}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+4}}{n+1}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)!-(3n)!}{(3n+1)!}; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n^2+1}).$$

Задача 4 (4 балла)

Вычислите $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ответы проиллюстрируйте возможным локальным поведением графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}+x}{x^2+2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{2x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{1}{x-6} - \frac{6}{x^2-6x} \right); \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1}-2}{\ln(1+x+x^2)}.$$

Задача 5 (2 балла)

Сравните бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$:

$$1) \ \alpha(x) = \sin^2(x-2), \ \beta(x) = \sqrt{6-x}-2, \ a = 2;$$

Задача 6 (5 баллов)

Проведите исследование функции на непрерывность, постройте ее график (а) или возможную часть ее графика в окрестности точки разрыва (б):

$$\text{а) (3 балла) } y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1 \\ 2, & \text{если } 1 < x < 3; \\ x - 1, & \text{если } x > 3 \end{cases} \quad \text{б) (2 балла) } y = \frac{x^3 - 1}{x - 4}.$$

Контрольная работа «Техника дифференцирования и простейшие приложения производной» (13 баллов)

Задача 1 (2 балла)

Вычислите производную следующей функции, пользуясь определением производной:

$$\text{а) } y = x^2 + 4x; \quad \text{б) } y = \ln(2 + x).$$

Задача 2 (5 баллов)

Выполните дифференцирование следующих функций:

$$1. f(x) = \ln \frac{2 + \operatorname{tg} x}{2 - \operatorname{tg} x}, \quad y'_x - ?$$

$$2. 2^x + xy + 3y^2 = 4, \quad y'_x - ?$$

$$3. y = f(x): \begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \sin^2 \sqrt[3]{t} \end{cases} \quad \text{а) } y'_x - ? \quad \text{б) } y''_x - ?$$

$$4. y = (x^4 + 2)^{\cos x}, \quad y'_x - ?$$

$$5. y = e^{-2x}, \quad y^{(n)} - ?$$

Задача 3 (1 балл)

Используя равенство $\Delta f \approx df$, вычислить приближенно $\cos 100^\circ$.

Задача 4 (5 баллов)

Вычислите следующие пределы, используя правило Лопиталя:

$$1) (1 \text{ балл}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}; \quad 2) (2 \text{ балла}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2} \ln(1 - x)}; \quad 3) (2 \text{ балла}) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Оценка каждого задания / процент выполнения задания	Критерии оценивания
Отлично / 91-100	Задание выполнено полностью и правильно. Возможны некоторые незначительные изъяны по оформлению.
Хорошо / 81-90	Задание выполнено полностью, но нет достаточного обоснования или при верном решении допущена незначительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений. Все требования, предъявляемые

	к работе, выполнены.
Удовлетворительно /61-80	При решении задания допущены грубые ошибки и (или) недочеты. Однако обучающийся демонстрирует владение основными базовыми умениями по проверяемой теме.
Неудовлетворительно / менее 60 процентов	Задание выполнено со значительным количеством ошибок на низком уровне. Многие требования, предъявляемые к заданию, не выполнены. ИЛИ Задание не выполнено.

Суммарное количество баллов за работу находится суммированием максимального балла за каждое задание, умноженное на процент его выполнения.

3.2 Критерии и шкала оценивания заданий расчетно-графических работ (РГР)

Перечень контрольных заданий, рекомендации по выполнению представлены в методических материалах по освоению дисциплины (модуля) и в электронном курсе в ЭИОС МАУ.

В ФОС включен типовой вариант контрольного задания.

Расчетно-графическая работа №1 «Введение в математический анализ»

Задание 1. Выполните действия над комплексными числами:

$$1) \text{ а) } \frac{(1+2i)^2 - (1+i)^3}{(3-2i)^3 - (2-i)^2}; \quad \text{б) } \frac{(1-\sqrt{3}i)^7}{(-2+2i)^5}; \quad \text{в) } \frac{z^{124}}{z^{98} - iz^{98}}, \text{ если } z = \sqrt{3} + i.$$

Задание 2. Найдите элементы множества: $X = \{x \in \square \mid |4i - k + \log_{0,5} x| \geq 5\}$, где k - номер варианта.

Задание 3. Решите алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел:

$$\begin{aligned} \text{а) } 4x^2 - 8x + 5 = 0; & \quad \text{б) } x^2 + (i-6)x + 8 - 4i = 0; & \quad \text{в) } x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0; \\ \text{г) } 6x^4 + 7x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0; & \quad \text{д) } x^4 + 81 = 0; \end{aligned}$$

выполните построение корней на комплексной плоскости.

Задание 4. Разложите дробь на простейшие дроби: $\frac{x^4 + 4x^3 - 1}{(x^2 + 2)(x - 3)}.$

Задание 5. Даны две функции $\rho_1(\varphi) = 4\cos 2\varphi$ и $\rho_2(\varphi) = 1 + 3\cos^2 \varphi$, которые выражают зависимость полярного радиуса точки на плоскости от ее полярного угла. Для каждой функции указать естественную область определения и построить график на плоскости с полярной системой координат. Изобразить на плоскости множество $A = \{(\varphi; \rho) : \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\}.$

Задание 6. Даны числовые функции одной действительной переменной: $f(x) = |2^x - 1|$, $g(x) = 2\arcsin \frac{x}{2}$ и числовое множество A значений аргумента x . Построить график каждой функции с помощью преобразований графиков основных элементарных функций. Найти следующие характеристики функций $f(x)$ и $g(x)$:

- естественная область определения функций;
- множество значений функций ;
- ограниченность функций
- ограниченность функций на множестве A ;
- максимум и минимум функции на множестве A ;
- точные верхние и нижние грани функции на множестве A .

Задание 7. Дано отображение $f : X \rightarrow Y$. Построить график функции $y = f(x)$ на множестве X , установить, является ли данное отображение инъекцией, сюръекцией, биекцией и является ли оно обратимым. В случае обратимости построить обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

- $f : \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow [0; 2], f(x) = \sin 2x + 1,$
- $f : (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - \ln(1 + x),$
- $f : (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \rightarrow (0; +\infty), f(x) = \frac{1}{|x|}$

Расчетно-графическая работа №2 «Дифференциальное и интегральное исчисление ФОП и его основные приложения»

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке. Проиллюстрировать схематическим графиком функции на этом промежутке:
 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5, x \in [-2; 4].$

Задача 2. Провести полное исследование свойств каждой из следующих функций и построить их графики:

$$1) y = \frac{x^2}{e^x} + 1; \quad 2) y = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}; \quad 3) y = \frac{x^2 + 5}{x-1}.$$

Задача 3. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую площадь полной поверхности.

Задача 4. Составить уравнения касательных и нормалей к окружности $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точках ее пересечения с осью OX . Сделать чертеж.

Задание 5. Вычислить неопределенный интеграл:

$$1.1 \int \frac{x+11}{x^2+6x+13} dx; \quad 1.2 \int \frac{x+11}{x^3+12x} dx; \quad 1.3 \int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}.$$

Задание 6. Найдите значения следующих определенных интегралов:

$$2.1 \int_1^e \ln x \cdot x^2 \cdot dx; \quad 2.2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}; \quad 2.3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

Задание 7. Вычислите значения несобственных интегралов или исследуйте их сходимость/расходимость с помощью достаточных признаков; приведите геометрическую иллюстрацию к каждому несобственному интегралу и результату его исследования:

$$3.1 \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x - 1}}; \quad 3.2 \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad 3.3 \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x \sqrt{x^2 + 4}} dx; \quad 3.4 \int_3^9 \frac{\sqrt{x}}{2x - x^2 + 3} dx.$$

Задание 8. Используя определенный интеграл, вычислите значение F площади каждой плоской фигуры, ограниченной заданными линиями; выполните построение фигуры. Выполните проверку правдоподобности результата:

$$4.1 \ x = (y-2)^3, \ x = 4y-8; \quad 4.2 \ \rho = \frac{1}{3}\varphi, \ \varphi \in [2\pi; 3\pi], \ \rho = \pi, \text{ полярная ось};$$

Задание 9. Вычислите значение V объема тела, которое получается вращением вокруг указанной оси (l) плоской фигуры D , ограниченной заданными линиями; сделайте чертёж фигуры D и рисунок искомого объема:

$$5.1 \ y^2 = 4-x, \ y=0, \ x=-1, \ (l) - \text{ось } O_x;$$

$$5.2 \ y = \arccos \frac{x}{3}, \ y = \arccos x, \ y=0, \ (l) - \text{ось } O_y;$$

Задание 10. Вычислите значение l длины дуги заданной линии; приведите иллюстрирующий чертеж, выполните проверку правдоподобности результата:

$$6.1 \ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \ 1 \leq x \leq 2; \quad 6.2 \ \begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}, \ \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Оценка каждого задания / процент выполнения задания	Критерии оценивания
Отлично / 91-100	Задание выполнено полностью и правильно. Возможны некоторые незначительные изъяны по оформлению.
Хорошо / 81-90	Задание выполнено полностью, но нет достаточного обоснования или при верном решении допущена незначительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений. Все требования, предъявляемые к работе, выполнены.
Удовлетворительно / 61-80	При решении задания допущены грубые ошибки и (или) недочеты. Однако обучающийся демонстрирует владение основными базовыми умениями по проверяемой теме.
Неудовлетворительно / менее 60 процентов	Задание выполнено со значительным количеством ошибок на низком уровне. Многие требования, предъявляемые к заданию, не выполнены. ИЛИ Задание не выполнено.

Суммарное количество баллов за РГР находится суммированием максимального балла за каждое задание, умноженное на процент его выполнения.

3.3 Критерии и шкала оценивания защит расчетно-графических работ

Перечень контрольных заданий, рекомендации по выполнению представлены в методических материалах по освоению дисциплины (модуля) и в электронном курсе в ЭИОС МАУ.

В ФОС включен типовой вариант контрольного задания.

Защита расчетно-графической работы №1 «Введение в математический анализ»

Задание 1. Дана функция $f(x) = 2^x - 1$ и множество $A = [-1; 2)$. Постройте график $f(x)$ и найдите $f(A)$.

Задание 2. Постройте график $f(x) = \frac{2x-1}{1-x}$ и найдите множество $A = \{x / y = f(x), y \in [0;1]\}$.

Задание 3. Укажите мощность множества X и найдите $\min X$, если

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D(y), \text{ где } y = \sqrt{2 - \lg|x-2|} \right\}.$$

Задание 4. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} + \frac{(2+i)^2}{1+2i}.$$

Задание 5. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической или в показательной форме:

$$z = \frac{z_1^{13}}{z_2^7}, \quad z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i.$$

Задание 6. Найдите корни квадратного уравнения и сделайте проверку по теореме Виета:

$$z^2 - 20z + 92 + 6i = 0.$$

Защита расчетно-графической работы №2 «Дифференциальное и интегральное исчисление ФОП и его основные приложения»

Задание 1. Вычислите неопределенные интегралы:

$$1) \int e^{3-x} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{(1-x)^2}; \quad 3) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4} dx; \quad 4) \int \sqrt[3]{1+5x^3} \cdot x^2 dx.$$

Задание 2. Выпишите все интегралы, для нахождения которых рекомендуется использовать формулу интегрирования по частям, и вычислите один из них:

$$1) \int x^2 \arctg x dx; \quad 2) \int x \cos 2x^3 dx; \quad 3) \int \frac{\sin x dx}{x^2}; \quad 4) \int x \cdot 3^{-x} dx.$$

Задание 3. Для каждого из интегралов ниже укажите рекомендуемую замену переменной и перейдите в определенном интеграле к новой переменной (вычислять далее интеграл не нужно):

$$1) \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2} dx \quad 2) \int_5^6 \frac{\sqrt[3]{x-5}}{5x+\sqrt[6]{x-5}} dx; \quad 3) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{4+3\cos^2 x} dx.$$

Задание 4. Установите тип каждого из следующих интегралов от функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow 1) \int_1^2 f(x) dx; \quad 2) \int_4^5 f(x) dx; \quad 3) \int_{-\infty}^1 f(x) dx; \quad 4) \int_1^6 f(x) dx.$$

Варианты ответа: определенный интеграл, сходящийся несобственный интеграл первого рода, расходящийся несобственный интеграл первого рода, сходящийся несобственный интеграл второго рода, расходящийся несобственный интеграл второго рода. *Выкладки, приводящие к ответу, должны быть приведены обязательно.*

Задание 5. Вычислите объем тела, которое получается вращением вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной указанными линиями, сделать чертеж:

$$y = x^3, y = x.$$

Оценка каждого задания / процент выполнения задания	Критерии оценивания
Отлично / 91-100	Задание выполнено полностью и правильно. Возможны некоторые незначительные изъяны по оформлению.
Хорошо / 81-90	Задание выполнено полностью, но нет достаточного обоснования или при верном решении допущена незначительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений. Все требования, предъявляемые к работе, выполнены.
Удовлетворительно / 61-80	При решении задания допущены грубые ошибки и (или) недочеты. Однако обучающийся демонстрирует владение основными базовыми умениями по проверяемой теме.
Неудовлетворительно / менее 60 процентов	Задание выполнено со значительным количеством ошибок на низком уровне. Многие требования, предъявляемые к заданию, не выполнены. ИЛИ Задание не выполнено.

Суммарное количество баллов за защиты РГР находятся суммированием максимального балла за каждое задание, умноженное на процент его выполнения.

4. Критерии и шкала оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю) при проведении промежуточной аттестации

Критерии и шкала оценивания результатов освоения дисциплины (модуля) в первом семестре (зачет)

Если обучающийся набрал зачетное количество баллов согласно установленному диапазону по дисциплине (модулю), то он считается аттестованным.

Оценка	Баллы	Критерии оценивания
Зачтено	60 - 100	Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону
Не зачтено	менее 60	Зачетное количество баллов не набрано

Критерии и шкала оценивания результатов освоения дисциплины (модуля) во втором семестре (экзамен)

Для дисциплин (модулей), заканчивающихся экзаменом, результат промежуточной аттестации складывается из баллов, набранных в ходе текущего контроля и при проведении экзамена:

В ФОС включен список вопросов к экзамену и типовой вариант экзаменационного теста с практической частью:

Вопросы к экзамену по дисциплине «Математический анализ»

Модуль 3 "Дифференциальное исчисление ФОП"

1. Определение производной, её механическая и геометрическая трактовки. Связь свойства непрерывности функции с её дифференцируемостью.
2. Основные правила дифференцирования: производные функций, образованных арифметическими операциями или суперпозицией.
3. Особые случаи дифференцирования: производные взаимно обратных функций, функций, имеющих параметрическое или неявное задание, логарифмическое дифференцирование.
4. Производные основных элементарных функций (таблица производных с выводом).
5. Касательная и нормаль к плоской линии: определения, составление уравнений.
6. Дифференциал функции: определение и основные свойства. Основные приложения дифференциала: к приближенному вычислению значений функции.
7. Производные высших порядков функций заданных явно и параметрически. Дифференциалы высших порядков.
8. Теоремы о дифференцируемых функциях (одна с доказательством): т. Ролля, её геометрическая трактовка, т. Коши.
9. Теорема Лагранжа (с доказательством), её геометрическая трактовка, следствия.
10. Теорема Лопиталя и её обобщение на случай $x \rightarrow \infty$ и на случай отношения бесконечно больших функций. Правило Лопиталя: формулировка и примеры использования.
11. Определение локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции и его недостаточность. Понятие острого экстремума. Первое достаточное условие для локального экстремума дифференцируемой функции.
12. Определения выпуклой или вогнутой линии и точки её перегиба. Признак выпуклости или вогнутости графика дважды дифференцируемой функции. Необходимое условие для точки перегиба и его недостаточность. Определение точки, подозрительной на перегиб. Достаточное условие для точки перегиба.
13. Определение асимптоты линии. Нахождение вертикальных и наклонных (в частности, горизонтальных) асимптот графика функции.
14. Многочлен Тейлора для заданной функции. Формулы Тейлора и Маклорена. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.
15. Второе достаточное условие для локального экстремума дважды дифференцируемой функции.

Модуль 4 "Интегральное исчисление ФОП"

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл: определения, основные свойства. Таблица неопределенных интегралов (одна с доказательством).
2. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование. Примеры.
3. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Основные типы интегралов, которые эффективно находить с помощью формулы интегрирования по частям. Примеры.
4. Рациональные дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей. Алгоритм интегрирования любых рациональных дробей и пример его реализации.

5. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Определение определённого интеграла.
6. Геометрическая и механическая трактовки определённого интеграла. Достаточные условия существования определённого интеграла.
7. Теорема Барроу и следствия из нее. Связь определённого интеграла с переменным верхним пределом и первообразной подынтегральной функции. Теорема Ньютона-Лейбница.
8. Основные свойства определённого интеграла. Доказательство свойства линейности, свойства аддитивности, свойства определённого интеграла от функции, равной единице.
9. Свойства об интегрировании неравенств, формулы для оценки значения определённого интеграла. Теорема о среднем значении непрерывной функции на конечном промежутке, ее геометрическая трактовка.
10. Использование в определенных интегралах формулы интегрирования по частям и метода замены переменной интегрирования. Примеры.
11. Общая методика приложений определённого интеграла.
12. Приложения определённого интеграла к вычислению площади плоской фигуры в декартовой и полярной системах координат.
13. Определение и вычисление длины дуги плоской кривой (с помощью определённого интеграла). Дифференциал длины дуги.
14. Несобственные интегралы I рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости (расходимости).
15. Несобственные интегралы II рода: определения, геометрические трактовки, достаточные условия сходимости (расходимости).

Образец экзаменационного теста с практической частью.

Тестовая часть.

Задание 1 (2 балла). Сформулируйте определение указанного понятия (если это возможно, сделайте иллюстрацию): *геометрический смысл дифференциала функции* $y = f(x)$.

Задание 2 (2 балла). Приведите пример задания на раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ при помощи правила Лопиталя. Приведите решение задания и формулировку соответствующей теоремы.

Задание 3 (1 балл). Выберите интегралы, в которых правильно учтен коэффициент перед аргументом при интегрировании:

- 1) $\int e^{4x+1} dx = \frac{1}{4} e^{4x+1} + C$; 2) $\int \sqrt{1-3t} dt = \frac{1}{3} (1-3t) \sqrt{1-3t} + C$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{2} \sqrt{1+x} + C$;
 4) $\int \frac{dx}{\cos^2(5x)} = \frac{1}{5} \operatorname{tg} x + C$; 5) $\int \sin 2x dx = 2 \cos 2x + C$; 6) $\int (1-x)^3 dx = -\frac{1}{4} (1-x)^4 + C$.

Задание 4 (2 балла). Выберите интегралы, для вычисления которых рекомендована подстановка $\operatorname{tg} x = t$ и выполните переход к новой переменной (далее вычислять не надо):

$$1) \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx \quad 2) \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{6+\sin x}; \quad 3) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{4+3\cos^2 x} dx.$$

Практическая часть.

1. (1 балл) Найти y'_x , если $y = \frac{\arctg(2x)-1}{\sin^2(4x)}$.
2. (2 балла) Найти точки максимума и минимума функции: $y = \ln(x^3 - 4x)$.
3. (2 балла) Вычислить интеграл: $\int (3x-7)4^{-x} dx$.
4. (2 балла) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, выразив ее определенным интегралом: $x = y^2, x + y = 2, y = 0, (y \geq 0)$.
5. (2 балла) Вычислить интеграл или доказать его расходимость: $\int_0^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Образец теоретической части экзаменационного билета

Вопрос 1. Теорема Лопиталя и её обобщение на случай $x \rightarrow \infty$ и на случай отношения бесконечно больших функций. Правило Лопиталя: формулировка и примеры использования.

Вопрос 2. Первообразная функции и неопределенный интеграл: определения, основные свойства. Таблица неопределенных интегралов.

Оценка каждого задания / процент выполнения задания	Критерии оценивания заданий экзаменационного теста
Отлично / 91-100	Задание выполнено полностью и правильно. Возможны некоторые незначительные изъяны по оформлению.
Хорошо / 81-90	Задание выполнено полностью, но нет достаточного обоснования или при верном решении допущена незначительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений. Все требования, предъявляемые к работе, выполнены.
Удовлетворительно / 61-80	При решении задания допущены грубые ошибки и (или) недочеты. Однако обучающийся демонстрирует владение основными базовыми умениями по проверяемой теме.
Неудовлетворительно / менее 60 процентов	Задание выполнено со значительным количеством ошибок на низком уровне. Многие требования, предъявляемые к заданию, не выполнены. ИЛИ Задание не выполнено.

Суммарное количество баллов за экзаменационный тест находится суммированием максимального балла за каждое задание, умноженное на процент его выполнения.

Оценка	Баллы	Критерии оценки устного ответа на экзамене
--------	-------	--

Отлично	4	На все вопросы экзаменационного билета верно сформулированы теоретические факты (определения, теоремы, свойства), приведены их формульные записи и возможные трактовки (геометрические, физические, др.). Выполнено обоснование (логическое или геометрически иллюстративное доказательство) большинства сформулированных утверждений (теорем, свойств). В случае, когда несколько утверждений имеют однотипные способы доказательства, можно ограничиться обоснованием одного или части из этих утверждений.
Хорошо	3	На все вопросы экзаменационного билета верно сформулированы теоретические факты (определения, теоремы, свойства), приведены их формульные записи и возможные трактовки (геометрические, физические, др.). В части формулировок возможны погрешности, не искажающие принципиально суть факта. Выполнено обоснование (логическое или геометрически иллюстративное доказательство) только некоторых из сформулированных утверждений (теорем, свойств), а для остальных приведены иллюстрации примерами, в том числе графическими.
Удовлетворительно	2	На все вопросы экзаменационного билета верно сформулированы теоретические факты (определения, теоремы, свойства), приведены их формульные записи и возможные трактовки (геометрические, физические, др.). В части формулировок возможны погрешности, не искажающие принципиально суть факта. Обоснования теоретических фактов не приведены, но показана способность применять эти факты при решении практических заданий.
Неудовлетворительно	менее 2	На большую часть вопросов экзаменационного билета верных ответов нет, то есть имеется хотя бы одно из следующих положений: - теоретический факт не сформулирован и не записан формулой; - формулировка или формульная запись факта имеют принципиальные ошибки, искажающие его суть; - теоретический факт сформулирован и приведена его формульная запись, но не приведены никакие примеры, его иллюстрирующие, и, следовательно, нет оснований сделать вывод об освоенности этого факта.

Количество баллов, полученные за экзаменационный тест с практической частью суммируется с баллами, полученными за теоретическую часть. Полученное количество баллов суммируется с баллами, набранными в ходе текущего контроля. Оценка за экзамен выставляется в соответствии с окончательным количеством баллов.

Итоговая оценка по дисциплине (модулю)	Суммарные баллы по дисциплине (модулю)	Критерии оценивания
Отлично	91 - 100	Выполнены все контрольные точки текущего контроля на высоком уровне. Экзамен сдан на «отлично».
Хорошо	81-90	Выполнены все контрольные точки текущего контроля, но не на максимальный балл. Экзамен сдан на «хорошо».
Удовлетворительно	70- 80	Контрольные точки выполнены, но не на максимальный бал. Экзамен сдан на «удовлетворительно»
Неудовлетворительно	69 и менее	Контрольные точки не выполнены или не сдан экзамен

5 Задания диагностической работы для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю) в рамках внутренней независимой оценки качества образования

ФОС содержит задания для оценивания знаний, умений и навыков, демонстрирующих уровень сформированности компетенций и индикаторов их достижения в процессе освоения дисциплины (модуля).

Комплект заданий разработан таким образом, чтобы осуществить процедуру оценки каждой компетенции, формируемых дисциплиной (модулем), у обучающегося в письменной форме.

Содержание комплекта заданий включает: *тестовые вопросы, расчетные задачи, тестовые задания.*

**Комплект заданий диагностической работы по первой части дисциплины
(промежуточная аттестация – зачет)**

ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности ИД-2оПК-1 «Решает... задачи с применением... методов математического анализа и моделирования»: <i>основные структуры элементарной математики, определения и основные свойства функций одной переменной (ФОО), ее предел и непрерывность</i>	
<i>Вариант 1</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите номера множеств из данного списка, для которых точная верхняя грань является числом: 1) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{ x-8 } < 16\}$; 2) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 + 3x - x^2 < 0\}$; 3) $C = \{x \mid x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$.
2	<u>Расчетное задание</u> Перечислите элементы данного множества: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1, f(x) = \cos 4x, x \in (0; \pi)\}$
3	<u>Тестовое задание</u> Укажите номер множества, на котором естественным образом определена данная функция: $f(x) = \sqrt{5-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \log_2(x+2)$. 1) $(-2;5]$, 2) $[-2;5]$, 3) $(-4;-2]$, 4) $(-2;5)$.
<i>Вариант 2</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите номера множеств из данного списка, для которых существует максимум множества: 1) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{ x-8 } < 16\}$; 2) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 + 3x - x^2 < 0\}$; 3) $C = \{x \mid x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$.
2	<u>Расчетное задание</u> Перечислите элементы данного множества: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0, f(x) = x^2 + 8 x - 9\}$.
3	<u>Тестовое задание</u> Укажите номер множества, на котором естественным образом определена данная функция:

	$f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \log_2(x-2).$ 1) $(-2;3]$, 2) $[2;3]$, 3) $(2;3]$, 4) $(2;3)$.
<i>Вариант 3</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите номера множеств из данного списка, которые являются счетными: 1) $X = \{x \in \mathbb{R} / 2^{ x-8 } < 16\}$; 2) $X = \{x \in \mathbb{R} / 4 + 3x - x^2 < 0\}$; 3) $C = \{x / x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$.
2	<u>Расчетное задание</u> Перечислите элементы данного множества: $C = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 12, f(x) = 4^{4x-2} - 4^{2x-1}\}$
3	<u>Тестовое задание</u> Укажите номер множества, на котором естественным образом определена данная функция: $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \log_2(x^2-1).$ 1) $(-4;3]$, 2) $[1;3]$, 3) $(1;3]$, 4) $(1;3)$.
<i>Вариант 4</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите номера множеств из данного списка, которые не являются счетными: 1) $X = \{x \in \mathbb{R} / 2^{ x-8 } < 16\}$; 2) $X = \{x \in \mathbb{R} / 4 + 3x - x^2 < 0\}$; 3) $C = \{x / x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$.
2	<u>Расчетное задание</u> Перечислите элементы данного множества: $C = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0, f(x) = \cos^2 x - 2\cos x - 3, x \in (-\pi; 3\pi]\}$
3	<u>Тестовое задание</u> Укажите номер множества, на котором естественным образом определена данная функция: $f(x) = \sqrt{9-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \log_2(x-5).$ 1) $(5;81]$, 2) $[5;81]$, 3) $(-5;3]$, 4) $(5;81)$.
<i>Вариант 5</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите номера множеств из данного списка, которые являются непрерывными: 1) $X = \{x \in \mathbb{R} / 2^{ x-8 } < 16\}$; 2) $X = \{x \in \mathbb{R} / 4 + 3x - x^2 < 0\}$;

	3) $C = \{x / x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$.
2	<u>Расчетное задание</u> Перечислите элементы данного множества: $B = \{x \in \mathbb{R} / f(x) < 0, f(x) = x - 3 - 3\}$.
3	<u>Тестовое задание</u> Укажите номер множества, на котором естественным образом определена данная функция: $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \log_2(x+5).$ 1) (0;4], 2) [0;4], 3) (-5;4], 4) (-5;-4).

Ответы к заданиям варианта 1:

1. 1), 3). 2. $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi\right\}$. 3. 1).

Ответы к заданиям варианта 2:

1. только 3). 2. $\{-1; 1\}$. 3. 3).

Ответы к заданиям варианта 3:

1. только 3). 2. $\{1\}$. 3. 3).

Ответы к заданиям варианта 4:

1. 1), 2). 2. $\{\pi; 3\pi\}$. 3. 1).

Ответы к заданиям варианта 5:

1. только 2). 2. $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. 3. 2).

Шкала оценивания заданий одного варианта:

Оценка (баллы)	Критерии оценки
5 «отлично»	90-100 % правильных ответов
4 «хорошо»	70-89 % правильных ответов
3 «удовлетворительно»	50-69 % правильных ответов
2 «неудовлетворительно»	49% и меньше правильных ответов

Комплект заданий диагностической работы по второй части дисциплины (промежуточная аттестация – экзамен)

ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности ИД-2опк-1 «Решает... задачи с применением... методов математического анализа и моделирования» в части дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной (ФОП)	
Вариант 1	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите логическую связь между следующими утверждениями P и Q: P: функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 ;

	Q: существует $f'(x_0)$; варианты ответа: 1) $P \Rightarrow Q$, 2) $Q \Rightarrow P$, 3) $P \Leftrightarrow Q$ 4) нет связи.
2	<u>Расчетное задание</u> Вычислите значение площади (с точностью до 10^{-2}) плоской фигуры, ограниченной указанными линиями: $y = 2^x, y = 2^{-x}, y = 4.$
3	<u>Тестовое задание</u> Дана функция одной переменной $y = f(x)$. Постройте схематично график этой функции и, используя график, отметьте знаком «+» каждое верное утверждение и знаком «-» каждое неверное утверждение из предложенных трех утверждений: $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2} \Rightarrow$ 1) $f(x)$ бесконечно малая функция при $x \rightarrow \infty$; 2) прямая $y = 2x$ – наклонная асимптота графика $y = f(x)$; 3) функция $f(x)$ не имеет локальных экстремумов.
<i>Вариант 2</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите логическую связь между следующими утверждениями P и Q: P: функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на промежутке $x \in [a; b]$; Q: функция $f(x)$ является интегрируемой по Риману на промежутке $x \in [a; b]$; варианты ответа: 1) $P \Rightarrow Q$, 2) $Q \Rightarrow P$, 3) $P \Leftrightarrow Q$, 4) нет связи.
2	<u>Расчетное задание</u> Пространственное тело получается вращением вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{-x}$, $x = -2$, $y = 0$. Вычислите значение объёма получившегося тела вращения.
3	<u>Тестовое задание</u> Дана функция одной переменной $y = f(x)$. Постройте схематично график этой функции и, используя график, отметьте знаком «+» каждое верное утверждение и знаком «-» каждое неверное утверждение из предложенных трех утверждений: $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2} \Rightarrow$ 1) $f(x)$ бесконечно большая функция в точке $x = 1$; 2) $f(x)$ непрерывная функция при всех $x \in \mathbb{R}$; 3) $f(x)$ имеет локальный минимум в нуле.
<i>Вариант 3</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите логическую связь между следующими утверждениями P и Q: P: непрерывная функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0; Q: $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует; варианты ответа: 1) $P \Rightarrow Q$, 2) $Q \Rightarrow P$, 3) $P \Leftrightarrow Q$, 4) нет связи.
2	<u>Расчетное задание</u> Вычислите значение площади (с точностью до 10^{-2}) плоской фигуры,

	ограниченной указанными линиями: $y = \sqrt{-x}$, $y = x + 2$, $y = 0$.
3	<u>Тестовое задание</u> Дана функция одной переменной $y = f(x)$. Постройте схематично график этой функции и, используя график, отметьте знаком «+» каждое верное утверждение и знаком «−» каждое неверное утверждение из предложенных трех утверждений: $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4} \Rightarrow$ 1) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$; 2) на промежутке $(0; 2)$ функция $f(x)$ сохраняет характер монотонности; 3) множество значений функции $f(x)$: $(-\infty; +\infty)$.
<i>Вариант 4</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите логическую связь между следующими утверждениями P и Q: P: существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$; Q: верно равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$; <i>варианты ответа:</i> 1) $P \Rightarrow Q$, 2) $Q \Rightarrow P$, 3) $P \Leftrightarrow Q$, 4) нет связи.
2	<u>Расчетное задание</u> Найдите радианную величину угла, под которым пересекаются данные линии: $x^2 - y^2 = 5 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$
3	<u>Тестовое задание</u> Дана функция одной переменной $y = f(x)$. Постройте схематично график этой функции и, используя график, отметьте знаком «+» каждое верное утверждение и знаком «−» каждое неверное утверждение из предложенных трех утверждений: $f(x) = x - \ln(x + 2) \Rightarrow$ 1) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту; 2) функция $f(x)$ имеет единственный локальный экстремум; 3) на промежутке $(-2; 0)$ функция сохраняет характер монотонности.
<i>Вариант 5</i>	
1	<u>Тестовый вопрос</u> Укажите логическую связь между следующими утверждениями P и Q: P: существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$; Q: интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ равен числу; <i>варианты ответа:</i> 1) $P \Rightarrow Q$, 2) $Q \Rightarrow P$, 3) $P \Leftrightarrow Q$, 4) нет связи.
2	<u>Расчетное задание</u> Вычислите значение площади (с точностью до 10^{-1}) плоской фигуры, ограниченной указанными линиями: $y = e^x$, $y = x - x^2$, $x = 1$, $x = 0$.
3	<u>Тестовое задание</u>

	Дана функция одной переменной $y = f(x)$. Постройте схематично график этой функции и, используя график, отметьте знаком «+» каждое верное утверждение и знаком «-» каждое неверное утверждение из предложенных трех утверждений: $f(x) = x^2 e^x \Rightarrow$ 1) график функции представляется непрерывной линией; 2) график функции $f(x)$ имеет точки перегиба; 3) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.
--	---

Ответы к заданиям варианта 1: 1. 2). 2. 7,34. 3. 1) –; 2) +; 3) –.

Ответы к заданиям варианта 2: 1. 1). 2. 2π . 3. 1) +; 2) –; 3) +.

Ответы к заданиям варианта 3: 1. 1). 2. 2π . 3. 1) +; 2) +; 3) –.

Ответы к заданиям варианта 4: 1. 3). 2. $\frac{\pi}{2}$. 3. 1) –; 2) +; 3) –.

Ответы к заданиям варианта 5: 1. 3). 2. 1,6. 3. 1) +; 2) +; 3) +.

Шкала оценивания заданий одного варианта:

Оценка (баллы)	Критерии оценки
5 «отлично»	90-100 % правильных ответов
4 «хорошо»	70-89 % правильных ответов
3 «удовлетворительно»	50-69 % правильных ответов
2 «неудовлетворительно»	49% и меньше правильных ответов